Отзыв

официального оппонента Белолипецкого Александра Алексеевича на диссертационную работу Белоусова Федора Анатольевича «К вопросу о существовании и единственности периодических решений для дифференциальных уравнений», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика» и 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

При изучении различных задач теории нелинейных колебаний первостепенное место занимает исследование установившихся процессов (стационарных, периодических, условно периодических, почти - периодических и т.п.). Представленная диссертационная работа посвящена изучению периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений различных типов, возникающих в различных приложениях.

Созданию общих методов поиска периодических решений систем дифференциальных уравнений (ДУ) посвящено немало литературы. Наиболее известными из них являются методы Андронова – Пуанкаре и Крылова – Боголюбова.

Предложенный в диссертации метод представляет новый подход к указанной проблеме. Скорее всего, он наиболее близок к методу интегральных уравнений. Однако, в диссертации этот метод использкется с существенными поправками. Важной составляющей частью подхода является выделение линейной компоненты в правой части дифференциального уравнения. Причем, такая линеаризация осуществляется некоторым оптимальным образом так, чтобы периодическое решение, во-первых, в принципе было найдено, во-вторых, желательно, чтобы оно было найдено быстро (с большей точностью или с наименьшим количеством итераций).

В 1 главе исследуется система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Предложены три подхода выделения не тейлоровской линейной части. Первый из них выделяет линейную часть вида ax, где a некоторый постоянный параметр, определяемый далее так, чтобы алгоритм численного поиска периодического решения решал задачу наиболее эффективно. Интересно, что такое оптимальное значение параметра a равно среднему арифметическому верхней и нижней констант липшица

модифицированной правой части системы ДУ. Во втором подходе значение a уже не параметр, а функция времени. В третьем подходе выделенная линейная часть имеет вид Ax. Во всех трех подходах определяется линейный *оператор периодических решений*, норма которого в соответствующих пространствах и определяет скорость сходимость итерационного процесса построения периодического решения.

Во второй главе изучается скалярное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка выше первого. Хотя такое уравнение сводится к системе ОДУ, т.е. к системе изученной ранее, результаты данной главы в данном случае являются более глубокими, чем предыдущие.

В третьей главе изучается проблема существования и единственности периодического решения для функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Надо сказать, что вообще этот класс уравнений еще находится в ранней стадии исследования. Поэтому его рассмотрение в данной работе представляет особый интерес. Неспроста анализ таких уравнений оказался наиболее трудоемким. И здесь получена верхняя оценка нормы оператора периодических решений. Последнее позволило сформулировать достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность периодических решений. Этот результат можно выделить как один из ключевых результатов диссертационной работы.

Наиболее важной отличительной особенностью представленных в диссертационной работе результатов является то, что полученные условия существования и единственности периодических решений являются достаточно просто проверяемыми, поскольку сформулированы в терминах правых частей уравнений.

Безусловно отличная диссертационная работа Белоусова Ф.А., как и любая работа, не лишена и некоторых недостатков.

Замечания и недостатки.

1.В работе имеются синтаксические ошибки и стилистические неточности. См., например, стр. 51-53, 60 и др. В формулах (2.2) и (2.4) линейные части уравнений записаны то в левой, то в правой части. Из-за этого в автореферат вкралась опечатка, т.к. из формулы (16) автореферата следует, что в матрице, определенной формулой (18), последняя строка записана с противоположным знаком. В формуле (2.13) содержится параметр m_2. Его природа неясна. Если исходить из предыдущего текста, то $m_2 = l_1 / l_2$.

где числитель и знаменатель – это константы Липшица для функции, стоящей в правой части уравнения (2.8). Но они равны нулю.

2.Изложенный в диссертации подход не способен выявлять периодические решения в автономных системах уравнений за исключением стационарных. Но для этого проще решить систему нелинейных уравнений, приравняв правую часть системы ДУ к нулю.

3.Естественен вопрос: насколько широк класс задач, где изложенный метод способен находить периодические решения? Этот вопрос связан с тем, что основные теоремы в диссертации о существовании периодических решений содержат достаточные условия их существования, но не необходимые. Для этого, например, можно рассмотреть уравнение $\dot{x} = x\cos t$. Если записать это уравнение, выделив линейную по x часть в виде $\dot{x} = ax + f(t,x),\ \ f(t,x) = x\cos t - ax$, то достаточное условие (1.23) существования периодического решения здесь не выполняется, т.к. $L_f / |a| = (1+|a|)/|a| > 1$, хотя уравнение имеет целый класс периодических решений вида $x(t) = Ce^{\sin t}$.

4. Во всех приведенных примерах оценивается норма оператора периодических решений, которая определяет скорость сходимости итерационного процесса вычисления периодического решения. Но численной реализации алгоритма нигде не приведено.

5.Не во всех случаях автору удалось получить не улучшаемые оценки, выполнение которых обеспечивает существование и единственность периодических решений. В частности, такие оценки не удалось получить для функционально-дифференциальных уравнений и для некоторых видов обыкновенных дифференциальных уравнений. Связано это с оценкой нормы упомянутого выше «оператора периодических решений» - там, где эту норму можно оценить точно, оценки получаются не улучшаемыми, в остальных случаях оценки могут быть уточнены.

Несмотря на указанные недостатки, полагаю, что работа Белоусова Ф.А. является интересным, прорывным исследованием. Ее актуальность, новизна, теоретическая и практическая значимость позволяют сделать вывод о том, что диссертация на тему «К вопросу о существовании и единственности периодических решений для дифференциальных уравнений», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика» и 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические

системы и оптимальное управление», соответствует требованиям, установленным Положением о порядке присуждения искомой ученой степени, а сам Ф.А. Белоусов заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Заведующий сектором математического моделирования технических систем ФГБУН ВЦ РАН им. А.А. Дородницына д.ф.-м.н., профессор *А.А. Белолипецкий*

119333, Москва, ул. Вавилова, 40
тел. 8-495-135-42-89
e-mail: belolip4609@yandex.ru

Подпись руки тов. Белолипецкого А.А.
ЗАВЕРЯЮ
Секретарь ВЦ РАН
«29» октября 2014 г.